A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT 2r., sem. letni
KOLOKWIUM 1

Wrocław, 19 kwietnia 2011

ZADANIE 1ab. W pewnej przestrzeni mamy dwie metryki d_1 i d_2 przy czym d_1 czyni naszą przestrzeń zwartą a d_2 jest słabsza od d_1 (tzn. $x_n \xrightarrow{d_1} x \implies x_n \xrightarrow{d_2} x$).
1) Udowodnij, że metryki te są równoważne.
2) Czy są one jednostajnie równoważne?

ROZWIĄZANIE:
1) Brakuje implikacji przeciwnej dla zbieżności. Niech $x_n \xrightarrow{d_2} x$. Ze zwartości, każdy podciąg tego ciągu ma podciąg zbieżny w d_1. Do zbieżności $x_n \xrightarrow{d_1} x$ wystarczy teraz pokazać, że każdy podciąg zbieżny w d_1 ma granicę x. Niech y oznacza granicę takiego podciągu. Skoro d_2 jest słabsza, to podciąg ten zbiega do y również w d_2. Ale my wiemy, że w d_2 każdy podciąg zbiega do x. Stąd $y = x$. Koniec.
2) Tak, to wynika z tego, że (X, d_2) jako homeomorficzna z (X, d_1) jest też zwarta. Identyczność jest teraz funkcją ciągłą między przestrzeniami zwartymi (X, d_1) i (X, d_2) (i odwrotnie), a taka funkcja jest jednostajnie ciągła (w obie strony).

ZADANIE 2a. Niech $C^1([0,1])$ oznacza zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych na $[0,1]$ mających ciągłą pochodną. Wykaż,że $\|f\|_1 = |f(0)| + \|f'\|_{sup}$ jest normą zupełną w $C^1([0,1])$.

ROZWIĄZANIE: Norma funkcji zerowej jest oczywiście zero. Normę zero ma tylko funkcja o pochodnej zero (czyli stała) i wartości zero w zerze, czyli ta stała jest zero. Jednorodność i podaddytywność:

$$\|af\| = |af(0)| + \|(af)'\|_{sup} = |a||f(0)| + |a|\|f'\|_{sup} = |a|\|f\|,$$
$$\|f+g\| = |f(0)+g(0)| + \|(f+g)'\|_{sup} \le |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_{sup} + \|g'\|_{sup} = \|f\| + \|g\|.$$

Zupełność: Niech f_n będzie podstawowy w tej normie. Z tego wynika, że $f_n(0)$ jest ciągiem podstawowym w $\mathbb{R}$ i f_n' jest ciągiem podstawowym w normie supremum funkcji ciągłych. W obu przypadkach jesteśmy w przestrzeniach zupełnych, więc istnieją $y = \lim_n f_n(0)$ i funkcja ciągła $g = \lim_n f'$. Niech f oznacza taki wybór funkcji pierwotnej dla g, że $f(0) = y$. Twierdzimy, że f_n zbiega do f w naszej normie. Do tego trzeba sprawdzić dwie rzeczy: 1. $f_n(0) \to f(0)$, i to jest prawda, bo $f(0) = y$, oraz 2. $f_n' \to f'$ jednostajnie, co też jest prawdą, bo $f' = g$. Koniec.

ZADANIE 2b. W zbiorze c_0 ciągów zbieżnych do zera wprowadzamy normę za pomocą ,,szeregu uzbieżniającego":

$$\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |x_n|,$$

gdzie $\forall n\ c_n > 0$ i $\sum_n c_n < \infty$. Czy tak uzyskana przestrzeń unormowana jest przestrzenią Banacha?

ROZWIĄZANIE:
Nie. Rozważmy następujący „ciąg ciągów": $x^k = (x^k_n) = (1, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, gdzie na początku jest k jedynek. Ciągi x^k należą do c_0. Zbieżność w normie z szeregiem uzbieżniającym jest równoważna zbieżności po współrzędnych (na ćwiczeniach dowodziliśmy równoważność takich zbieżności), zatem granicą ciągu x^k (przy $k \to \infty$) jest ciąg samych jedynek $x = (1, 1, 1, \ldots)$, który nie należy do c_0. Zatem w przestrzeni c_0 z taką normą ciąg x^k po prostu nie jest zbieżny. Teraz sprawdzimy, że jednak jest on podstawowy. Ale to jest oczywiste, gdyż, jak zauważyliśmy, w większej przestrzeni (ciągów zbieżnych albo ciągów ograniczonych) x^k jest zbieżny po współrzędnych, czyli w normie z szergiem uzbieżniającym. A ciąg zbieżny w normie jest podstawowy w tej normie. Ta podstawowość nie zależy już od tego w jakiej przestrzeni rozważamy dany ciąg, o ile stosujemy tą samą normę. Zatem x^k jest podstawowy w c_0 z rozważaną normą (z szeregiem uzbieżniającym). W rozważanej przestrzeni unormowanej wskazaliśmy ciąg podstawowy ale nie zbieżny, czyli nie ma zupełności.

ZADANIE 3a. Czy ciąg $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ jest bazą topologiczną w $C([0, 1])$ (z normą supremum)?
Wskazówka: Rozważ funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x}$ i sprawdź czy zbieżność szeregu Taylora jest jednostajna. Wykaż, że nie ma innego szeregu potęgowego zbieżnego jednostajnie do tej funkcji.

ROZWIĄZANIE: Załóżmy, że istnieje szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ zbieżny jednostajnie do funkcji f na $[0, 1]$. Wtedy możne taki szereg różniczkować wyraz po wyrazie i w łatwy sposób dostaniemy

$$f^{(n)}(0) = n!a_n,$$

czyli $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, co oznacza, że nasz szereg to szereg Taylora tej funkcji. Ale szereg Taylora funkcji f jest znany: to $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$. Ten szereg zbiega do funkcji f na $[0, 1)$, a w 1 nie ma nawet zwykłej zbieżności (sumy częściowe w 1 wynoszą na przemian 1 i 0), więc tym bardziej nie ma zbieżności jednostajnej na $[0, 1]$. Czyli szeregu jednostajnie zbieżnego żądanej postaci nie ma.

ZADANIE 3b. Weźmy zbiór funkcji zespolonych (określonych na $\mathbb{C}$)

$$\{f_n : n \in \mathbb{Z}\},$$

gdzie $f_n(z) = z^n$. Sprawdź, że jest to układ liniowo niezależny nad $\mathbb{C}$ w $C(\mathbb{C})$.

Wskazówka: skorzystaj z zasadniczego twierdzenia algebry (o ilości pierwiastków wielomianu). UWAGA, trzeba najpierw coś zrobić z wykładnikami ujemnymi!!!

ROZWIĄZANIE:
Weźmy dowolną (skończoną) kombinację liniową funkcji z tej rodziny ze współczynnikami zespolonymi. Zawsze można ją zapisać tak (najwyżej niektóre współczynniki będą zerami):

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n.$$

Niestety, nie jest to wielomian, ze względu na występowanie potęg ujemnych. Ale można to naprawić mnożąc f przez z^N:

$$g(z) = f(z)z^N = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^{n+N}.$$

To już jest wielomian, gdyż wykładniki $n+N$ są całkowite i nieujemne (przebiegają wartości od 0 do $2N$). Gdyby f była funkcją tożsamościowo równą zero (zero w przestrzeni funkcji), to również funkcja g byłaby tożsamościowo równa zero. Wielomian stopnia skończonego ma co najwyżej tyle pierwiastków jakiego jest stopnia, a wielomian g (tożsamościowo równa zeru) ma nieskończenie wiele pierwiastków. To oznacza, że jest to wielomian zerowy i wszystkie współczynniki a_n są zerami. Ale to były też współczynniki zerującej się kombinacji liniowej funkcji $f_n = z^n$. To oznacza niezależność liniową tych funkcji.

ZADANIE 4ab. Czy ciąg $(a_n)_{n\geq 2}$, gdzie $a_n = \frac{1}{\log(n^n)}$ należy do l^1? A do l^2? UWAGA: Ciąg ten startuje od $n = 2$ ze względów czysto formalnych (bo w jedynce wychodzi zero w mianowniku).

Wsk. Skorzystaj z kryterium całkowego zbieżności szeregu.

ROZWIĄZANIE: Zauważmy, że $\log(n^n) = n \log n$. Trzeba sprawdzić zbieżność całek

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \log x}\, dx \quad i \quad \int_2^\infty \frac{1}{x^2 \log^2 x}\, dx.$$

W pierwszej całce zapisując $\frac{1}{x \log x}$ jako $\frac{\frac{1}{x}}{\log x}$ widzimy, że licznik jest pochodną mianownika. Zatem funkcją pierwotną jest logarytm mianownika, czyli $\log(\log x)$. Ta funkcja zmierza do nieskończoności przy $x \to \infty$, zatem całka jest rozbieżna i $(a_n) \notin l_1$. Druga całka jest oczywiście zbieżna, bo zbieżna jest całka z $\frac{1}{x^2}$, a nasza funkcja podcałkowa już dla $x > e$ jest mniejsza (i nadal nieujemna). Czyli $(a_n) \in l^2$.

ZADANIE 5a. Niech W będzie podprzestrzenią domkniętą przestrzeni Hilberta V. Wykaż, że zbiór wszystkich wektorów ortogonalnych do wszystkich elementów W jest podprzestrzenią liniową domknięta. (Przestrzeń tą oznaczamy przez $W^\perp$). Wykaż, że $(W^\perp)^\perp = W$.

ROZWIĄZANIE (powininno składać się z czterech części)
1) Niech $x, y \in W^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Niech $w \in W$. Wtedy

$$\langle \alpha x + \beta y, w\rangle = \alpha\langle x, w\rangle + \beta\langle y, w\rangle = 0.$$

Zatem $\alpha x + \beta y \in W^{\perp}$, czyli $W^{\perp}$ jest p. liniową.
2) Niech $x_n \in W^{\perp}$, $x = \lim_n x_n$ w normie. Wtedy dla każdego $w \in W$, z ciągłości iloczynu skalarnego w normie, mamy $\langle x, w\rangle = \lim_n\langle x_n, w\rangle = \lim_n 0 = 0$. Stąd $x \in W^{\perp}$ co dowodzi domkniętości $W^{\perp}$.
3) Niech $x \in W, y \in W^{\perp}$. Wtedy z definicji $W^{\perp}$, $\langle x, y\rangle = 0$, a zatem $x \in (W^{\perp})^{\perp}$. Czyli $W \subset W^{\perp\perp}$.
4) Na odwrót, niech $x \in W^{\perp\perp}$. Ponieważ W jest przestrzenią domkniętą, to x ma jednoznaczny rozkład na $u+v = x_W + (x - x_W)$, $u = x_W \in W$ i $v = x - x_W \in W^{\perp}$. Ponieważ $v \in W^{\perp}$, a $x \in W^{\perp\perp}$ to $\langle x, v\rangle = 0$. Czyli

$$0 = \langle x, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle.$$

Ponieważ $u \in W$ i $v \in W^{\perp}$ to pierwszy iloczyn wynosi zero. Zatem ostatni też musi być zero, a to jest kwadrat normy v. Zatem $v = 0$, stąd $x = u \in W$. $\square$

ZADANIE 5b. Są trzy ważne własności przeliczalnego układu wektorów przestrzeni Hilberta: ortogonalność, normalność i zupełność (rozpinanie całej przestrzeni). W przestrzeni ℓ^2 rozważmy następujący układ wektorów $\{e_1, e_2, \dots\}$ (zapisanych jeden pod drugim, jako wiersze):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
(& \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 0, & \frac{1}{4}, & 0, & \frac{1}{4\sqrt{2}}, & 0, & \frac{1}{8}, & 0, & \frac{1}{8\sqrt{2}}, & 0, & \dots \ ) \\
(& 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{4}, & \dots \ ) \\
(& 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & \dots \ ) \\
(& 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \ ) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

(w każdej kolumnie jest dokłandnie jeden współczynnik niezerowy).
Sprawdź, które z trzech podstawowych własności spełnia ten układ, a których nie.

ROZWIĄZANIE:
1. W każdym mierszu wyrazy niezerowe przebiegają ciąg $(\sqrt{2})^{-n}$. Zatem norma takiego wiersze wynosi

$$\|e_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}((\sqrt{2})^{-n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Po spierwiastkowaniu dostajemy, że jest to układ wektorów unormowanych.

2. Ortogonalność: iloczyn skalarny dwóch różnych wektorów e_k, e_j w można wyliczać w standardowej bazie i wtedy jest to po prostu suma iloczynów po współrzędnych.

Ale na każdej współrzędnej co najwyżej jeden z ciągów ma element niezerowy, więc na każdej współrzędnej nasz iloczyn wynosi zero. Stąd jest to układ ortonormalny.

3. Nie jest to układ zupełny w ℓ^2, bo nie można nim wygenerować na przykład elementu mającego niezerową pierwszą i zerową trzecią współrzędną (na przykład $v = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^2$).

Tomasz Downarowicz